

## **IDENTIFICAZIONE DEL DANNO DI TRAVI DI EULERO-BERNOULLI SOGGETTE A CARICHI QUASI-STATICI**

G. BUDA, S. CADDEMI

*Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale – sez. Ingegneria Strutturale, Università di Catania, Catania.*

### **SOMMARIO**

Nel presente lavoro, per travi uniformi di Eulero-Bernoulli in presenza di danni concentrati, si affronta il problema diretto in campo statico introducendo un modello di danno come singolarità della rigidezza flessionale. Il problema inverso di identificazione della intensità e della posizione dei danni viene affrontato mediante una procedura di ottimizzazione di una funzione che misura l'errore della risposta del modello rispetto a misure sperimentali.

### **ABSTRACT**

In this study the direct static analysis problem, for Euler-Bernoulli uniform beams showing concentrated damages, is solved by introducing a damage model as a flexural stiffness with singularities. The inverse identification problem of damage intensities and locations is studied by means of an optimisation procedure of a function measuring the error of the model response with respect to experimental measures.

### **1. INTRODUZIONE**

Nella letteratura degli ultimi trent'anni il problema dell'identificazione di danni in sistemi strutturali è stato oggetto di ampi studi trovando applicazioni in tutti quei casi non accertabili mediante semplice ispezione visiva. La presenza di danni comporta una perdita di rigidezza strutturale che induce variazioni nella risposta sia statica che dinamica. Misure della risposta possono dunque essere acquisite mediante prove non distruttive e costituiscono la base di partenza delle procedure di identificazione del danno. Singole prove non distruttive in regime dinamico forniscono in generale un largo numero di informazioni e sono, peraltro, facilmente eseguibili e ripetibili avendo così incoraggiato una estesa letteratura in merito alla messa a punto di procedure di identificazione dinamica. Nel caso tuttavia di semplici sistemi strutturali quali travi rettilinee soggette a danno, prove statiche sono facilmente eseguibili e possono rappresentare un'utile complemento all'identificazione in campo dinamico senza l'introduzione di incertezze imputabili alle masse ed ai rapporti di smorzamento. In letteratura si trova dunque una produzione, seppure meno estesa, in cui vengono proposte procedure di identificazione sulla base di acquisizione di misure da prove statiche in cui vengono affrontati problemi di identificazione di parametri fisici e geometrici di sistemi strutturali od anche di

identificazione del danno facendo uso di modelli ad elementi finiti. Recentemente è stata proposta una procedura di ottimizzazione per l'identificazione di danni concentrati in travi rettilinee da misure di momento flettente in campo statico [1] basata su una modellazione del danno come una deformazione anelastica, funzione della distribuzione degli sforzi, imposta sulla trave integra.

In questo studio si affronta il problema di identificazione di danni concentrati in travi rettilinee di Eulero-Bernoulli, ipotizzando un comportamento lineare della trave danneggiata, sulla base di misure acquisite da prove statiche. Si affronta, in primo luogo, il problema di analisi diretto in campo statico introducendo un modello di danno come una singolarità della rigidezza flessionale, senza l'introduzione di alcuna ipotesi sulla piccolezza del danno. Tale singolarità è descritta mediante la ben nota distribuzione delta di Dirac che, per il caso in questione, richiede regole di integrazione ad hoc recentemente discusse in [2]. Tale approccio consente di ottenere la risposta del modello in forma esplicita nei parametri posizione ed intensità del danno. Il problema inverso di identificazione viene affrontato mediante una procedura di ottimizzazione di una funzione che misura l'errore della risposta del modello rispetto a misure sperimentali. La funzione errore, sulla scorta dell'approccio adottato nel problema diretto, è espressa in forma non quadratica nei parametri da identificare. L'applicazione della procedura di ottimizzazione consente di ottenere utili indicazioni in merito alla posizione dei punti di misura scelti ed al tipo di condizione di carico da realizzare per l'esecuzione di prove sperimentali. Infine, la sensibilità della procedura di identificazione ad inevitabili errori presenti nell'acquisizione delle misure sperimentali è studiata adottando indici probabilistici dei parametri identificati, così come indicato in [3].

## 2. UN MODELLO DI DANNO CONCENTRATO PER LA TRAVE DI EULERO-BERNOULLI

La presenza di danno in una trave rettilinea può essere pensata come una diminuzione delle caratteristiche fisiche e geometriche della sezione trasversale in un tratto di trave di ampiezza finita. Nel caso in cui il danno sia una brusca variazione di sezione è noto dalla letteratura, e sulla scorta di risultati di prove sperimentali, che la rigidezza flessionale della trave subisce una diminuzione per un tratto finito nell'intorno della sezione danneggiata, la cui ampiezza dipende dall'entità del danno stesso. In alternativa, è possibile adottare dei criteri di equivalenza che consentono di modellare il danno concentrato come una cerniera interna dotata di molla rotazionale la cui rigidezza è dipendente dall'entità del danno [4, 5]. In questo lavoro, nell'ambito di quest'ultimo approccio, verrà considerata la seguente espressione per la rigidezza della molla equivalente [6]

$$k_{eq} = \frac{EI_0}{h} \frac{0.9(\beta-1)^2}{\beta(2-\beta)} \quad (1)$$

dove  $E$  è il modulo di Young,  $I_0$  il momento di inerzia dei tratti di trave integra,  $h$  l'altezza della sezione trasversale e  $\beta$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ , rapporto tra la variazione di altezza della sezione dovuta dal danno rispetto all'altezza totale  $h$ , indica l'intensità del danno.

In particolare, inizialmente si studierà il modello di trave uniforme di Eulero-Bernoulli soggetta ad un singolo danno concentrato descritto mediante una rigidezza flessionale modellata con singolarità che consente il manifestarsi di rotazioni relative concentrate nella sezione oggetto del danno. Non viene adottata alcuna ipotesi sulla piccolezza del danno, e si considererà un comportamento lineare della trave danneggiata.

L'equazione differenziale del quarto ordine in campo statico che governa la trave di Eulero-Bernoulli con momento di inerzia variabile  $I(x)$  si scrive come segue:

$$[EI(x)u''(x)]'' = q(x) \quad (2)$$

dove  $q(x)$  è il carico verticale esterno,  $u(x)$  è lo spostamento verticale e un apice indica la derivata della funzione rispetto alla variabile  $x$ . L'eq. (2) riassume le ben note relazioni di equilibrio, di compatibilità e costitutive che intercorrono tra lo sforzo di taglio  $T(x)$ , il momento flettente  $M(x)$ , lo spostamento verticale  $u(x)$ , la rotazione  $\varphi(x)$  e la curvatura  $\chi(x)$ .

In questo studio si è interessati ad adottare l'eq.(2) per descrivere il caso di una trave di Eulero-Bernoulli che presenti una discontinuità della rotazione nella sezione di ascissa  $x_0$  equivalente alla presenza di un danno concentrato. A tale scopo, si consideri una rigidezza flessionale costante  $EI_0$  che però presenti una singolarità in  $x_0$  espressa come segue

$$EI(x) = EI_0[1 - \alpha\delta(x - x_0)] \quad (3)$$

in cui la singolarità è espressa da una delta di Dirac  $\delta(x - x_0)$  centrata in  $x_0$  moltiplicata per un parametro  $\alpha$ . L'interpretazione del modello adottato mediante l'eq.(3) non è immediata, tuttavia la sostituzione della stessa nell'eq.(2) fornisce

$$[EI_0[1 - \alpha\delta(x - x_0)]u''(x)]'' = q(x) \quad (4)$$

La doppia integrazione dell'eq.(4), tenendo conto delle ben note equazioni di compatibilità  $\chi(x) = \varphi'(x)$  e  $\varphi(x) = -u'(x)$ , fornisce la seguente espressione

$$\chi(x) = -u''(x) = -\frac{q^{[2]}(x)}{EI_0} - \alpha u''(x)\delta(x - x_0) \quad (5)$$

dove  $q^{[2]}(x)$  indica una funzione continua primitiva seconda di  $q(x)$ . Si noti che la continuità della funzione  $q^{[2]}(x)$  permane anche in quei casi in cui il carico esterno presenti delle discontinuità ovvero riproduca il caso di carichi verticali concentrati. Infatti, in questi ultimi due casi, il carico esterno  $q(x)$  conterrebbe, rispettivamente, distribuzioni quali il gradino unitario  $U(x - x_0)$  e la delta di Dirac  $\delta(x - x_0)$ . L'espressione (5) indica che il modello di rigidezza flessionale adottato produce una curvatura fornita da una delta di Dirac centrata in  $x_0$  sovrapposta ad una funzione continua. Inoltre, la relazione di compatibilità  $\chi(x) = \varphi'(x)$  rivela, sulla base dell'eq.(5), una funzione rotazione  $\varphi(x)$  discontinua in  $x_0$  (corrispondente alla presenza di una rotazione relativa) e, ancora, l'altra relazione di compatibilità  $\varphi(x) = -u'(x)$  indica uno spostamento verticale  $u(x)$  continuo per tutta la lunghezza della trave. Tali osservazioni giustificano il modello di rigidezza flessionale adottato nell'eq.(3) in grado di rappresentare la presenza di una cerniera interna in  $x_0$ . Gli aspetti legati al significato del parametro  $\alpha$  risulteranno tuttavia chiari in presenza dei risultati prodotti dal presente modello, come in seguito indicato.

L'integrazione dell'eq.(4) fornisce la soluzione cercata. Allo scopo di trattare la delta di Dirac nella procedura di integrazione si riscrive l'eq.(4) sotto la forma

$$u^{IV}(x) = \frac{q^*(x)}{EI_0}; \quad q(x) = q(x) + \alpha[u^{IV}(x)\delta(x - x_0) + 2u^{III}(x)\delta'(x - x_0) + u''(x)\delta''(x - x_0)] \quad (6)$$

L'eq.(6) ha la forma dell'equazione differenziale del quarto ordine usualmente assunta per le travi uniformi, tuttavia la singolarità della rigidezza flessionale è tenuta in conto dalla definizione del carico fittizio  $q^*(x)$  in cui compaiono le derivate della risposta  $u(x)$  e della delta di Dirac. L'integrazione dell'eq.(6) può essere condotta secondo la procedura indicata in [2]. L'integrazione dell'eq.(6) conduce alla seguente espressione dello spostamento

$$u(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + u_q(x) + \alpha[x \int u''(x)\delta(x - x_0)dx - \int u''(x)x\delta(x - x_0)dx] \quad (7)$$

dove

$$u_q(x) = \frac{q^{[1]}(x)x^3 - 3x^2[q(x)x]^{[1]} + 3x[q(x)x^2]^{[1]} - [q(x)x^3]^{[1]}}{6EI_0} \quad (8)$$

in cui l'apice <sup>[1]</sup> indica la primitiva della funzione. Le costanti  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$  si determinano mediante l'imposizione delle condizioni al contorno. Un discorso a parte meritano gli ultimi due termini che rappresentano, ricordando l'eq.(5), gli integrali dei prodotti di due distribuzioni  $u''(x)$  e  $\delta(x-x_0)$  entrambe centrate in  $x_0$  che non risulta definito dalle regole classiche sulle distribuzioni. Moltiplicando l'eq.(5) per  $\delta(x-x_0)$  si nota che il prodotto  $u''(x)\delta(x-x_0)$  può essere ricondotto al prodotto di due delta di Dirac entrambe centrate in  $x_0$ . Recentemente [7] sono state indicate le condizioni sotto le quali il prodotto di due o più delta di Dirac centrate nello stesso punto può essere ricondotto ad una singola delta di Dirac per una costante dimensionale  $A$  (con le stesse dimensioni di  $\delta(x-x_0)$ ). Nell'ambito di tale definizione, ed in virtù dell'eq.(5), il prodotto  $u''(x)\delta(x-x_0)$  assume la seguente forma

$$u''(x)\delta(x-x_0) = \frac{1}{1-\alpha A} \frac{q^{[2]}(x_0)}{EI_0} \delta(x-x_0) \quad (9)$$

Sulla base dell'eq.(9) è possibile ora risolvere gli integrali presenti nell'eq.(7), che assume la seguente forma

$$u(x) = c_1 + c_2x + c_3[x^2 + 2\frac{\alpha}{1-\alpha A}(x-x_0)U(x-x_0)] + c_4[x^3 + 6\frac{\alpha}{1-\alpha A}x_0(x-x_0)U(x-x_0)] + u_q(x) + \frac{\alpha}{1-\alpha A}u_q''(x_0)(x-x_0)U(x-x_0) \quad (10)$$

Derivazione dell'eq.(10) fornisce la rotazione  $\varphi(x)$ , che presenta una discontinuità  $\Delta\varphi(x_0)$  in  $x_0$ , espressa come segue

$$\Delta\varphi(x_0) = \varphi(x_0^+) - \varphi(x_0^-) = -\frac{\alpha}{1-\alpha A}(2c_3 + 6c_4x + u_q''(x_0)) \quad (11)$$

che rappresenta la rotazione relativa concentrata nella sezione di ascissa  $x_0$  prodotta dal modello di rigidità flessionale adottato nell'eq.(5). Doppia derivazione dell'eq.(10) fornisce l'espressione della curvatura  $\chi(x)$  espressa come segue

$$\chi(x) = -u''(x) = -(2c_3 + 6c_4x + u_q''(x))[1 + \frac{\alpha}{1-\alpha A}\delta(x-x_0)] \quad (12)$$

L'eq.(12), insieme all'equazione costitutiva  $\chi(x) = M(x)/EI(x)$  ed al modello adottato nell'eq.(3), fornisce l'espressione del momento flettente  $M(x)$  continua su tutta la trave

$$M(x) = EI(x)\chi(x) = -EI_0(2c_3 + 6c_4x + u_q''(x)) \quad (13)$$

Confrontando le eqq.(11) e (13) si ottiene

$$\Delta\varphi(x_0) = \frac{\alpha}{1-\alpha A} \frac{M(x_0)}{EI_0} \quad (14)$$

L'eq.(14) fornisce il legame esistente tra la rotazione relativa in  $x_0$  ed il valore del momento flettente alla stessa ascissa, dunque suggerisce un'interpretazione della singolarità del modello di rigidità flessionale come una cerniera interna all'ascissa  $x_0$  dotata di molla rotazionale con rigidità

$$k_\varphi = \frac{1-\alpha A}{\alpha} EI_0 \quad (15)$$

Si noti che l'analisi dimensionale delle eqq.(3) e (15) richiede che la costante  $A$  sia l'inverso di una lunghezza, mentre il parametro  $\alpha$  abbia le dimensioni di una lunghezza. L'eq.(15), insieme alla relazione (1) che fornisce la rigidità della molla equivalente al danno

presente, consente di ottenere il seguente valore del parametro  $\alpha$

$$\alpha = \frac{2\beta - \beta^2}{(0.9/h - A)\beta^2 - (0.9/h - A)2\beta + (0.9/h)} \quad (16)$$

da adottare nel modello con singolarità per descrivere coerentemente il danno. La funzione  $\alpha(\beta)$  rappresentata dall'eq.(16) è monodroma e compresa tra 0 ed  $1/A$  nell'intervallo  $0 \leq \beta \leq 1$ . Si noti altresì che, in base all'eq.(15) per  $\alpha = 1/A$  si ottiene una cerniera interna senza alcuna molla rotazionale, per  $\alpha = 0$  si ottiene una rigidità infinita corrispondente alla presenza di un incastro interno in  $x_0$  (cioè trave senza danno).

L'approccio diretto presentato per il caso di una sola singolarità ha condotto alla soluzione esplicita dello spostamento verticale riportata nell'eq.(10), tuttavia il caso di  $n$  singolarità, identificate dai parametri  $\alpha_i$  ed  $x_{0i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , può essere trattato con una procedura analoga conducendo alla seguente espressione dello spostamento verticale

$$u(x) = c_1 + c_2x + c_3[x^2 + 2\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i A} (x - x_{0i})U(x - x_{0i})] + \quad (17)$$

$$+ c_4[x^3 + 6\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i A} x_{0i}(x - x_{0i})U(x - x_{0i})] + u_q(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i A} u_q''(x_{0i})(x - x_{0i})U(x - x_{0i})$$

### 3. IL PROBLEMA INVERSO PER LA IDENTIFICAZIONE DEL DANNO CONCENTRATO DA MISURE DELLA RISPOSTA

La disponibilità di una soluzione esplicita nei parametri  $\alpha_i$  ed  $x_{0i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) descrittivi degli  $n$  danni concentrati consente di potere impostare il problema inverso dell'identificazione come segue. Supponendo di disporre, a seguito dell'esecuzione di prove sperimentali in regime statico, di misure di spostamento verticale  $u^E(x_{k,l})$  ( $k = 1, \dots, nm$ ,  $l = 1, \dots, nc$ ) in prefissati  $nm$  punti di misura e per  $nc$  condizioni di carico, è possibile scrivere il seguente sistema algebrico di equazioni

$$u(\alpha_i, x_{0i}, x_{k,l}) = u^E(x_{k,l}), \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, nm, \quad l = 1, \dots, nc \quad (18)$$

dove  $u(\alpha_i, x_{0i}, x_{k,l})$  sono gli spostamenti verticali del modello di riferimento, alle ascisse corrispondenti ai punti di misura e per le medesime condizioni di carico delle prove sperimentali, in funzione dei parametri  $\alpha_i$  ed  $x_{0i}$ , oggetto dell'identificazione, espressi mediante l'eq.(17). E' ben noto [1] che il numero di misure richieste per identificare i parametri  $\alpha_i$  ed  $x_{0i}$  deve soddisfare la disuguaglianza  $nc \times nm \geq 2n$  da ritenersi condizione necessaria, ma non sufficiente per la soluzione del problema inverso. E' bene notare che il sistema algebrico di equazioni (18) è non-lineare nei parametri  $\alpha_i$  ed  $x_{0i}$ , ma anche nei parametri  $\alpha_i / (1 - \alpha_i A)$  così come risultano una volta determinate, sulla base delle condizioni al contorno, le costanti  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  presenti nell'eq.(17). Il sistema di equazioni (18) può, nei casi più semplici, fornire comode soluzioni in forma chiusa di  $\alpha_i$  ed  $x_{0i}$ . Inoltre, può fornire utili indicazioni in merito alle posizioni degli  $nm$  punti di misura ed alle  $nc$  configurazioni di carico affinché il problema inverso sia ben posto. Si rimanda comunque ad altro studio l'approfondimento e la soluzione del sistema di equazioni (18). Si ritiene necessario, tuttavia, notare che la corretta definizione del sistema di equazioni (18), basato sulla soluzione esplicita riportata in eq.(17), richiede la conoscenza a priori del numero di danni presenti da identificare ed, inoltre, la loro posizione in relazione ai punti di misura scelti, al fine di valutare correttamente il valore delle funzioni gradino presenti in (17) nei punti di misura e dunque attribuire la corretta espressione analitica a  $u(\alpha_i, x_{0i}, x_{k,l})$ . La procedura qui descritta

può dunque fornire indicazioni teoriche utili al fine di interpretare i risultati forniti da procedure di identificazione alternative.

Per quanto esposto in questo paragrafo si è ritenuto opportuno affrontare il problema di identificazione del danno mediante una tecnica di ottimizzazione, sulla scorta della soluzione esplicita del modello adottato espressa dall'eq.(17), così come descritto nel paragrafo successivo.

#### 4. PROCEDURA DI OTTIMIZZAZIONE PER L'IDENTIFICAZIONE DEL DANNO

La procedura di identificazione presentata in questo paragrafo si basa sul seguente problema di minimizzazione vincolato

$$\min_{\alpha_i, x_{0i}} \Pi(\alpha_i, x_{0i}) = \sum_{l=1}^{nc} \sum_{k=1}^{nm} [u(\alpha_i, x_{0i}, x_{k,l}) - u^E(x_{k,l})]^2, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1/A, \quad 0 \leq x_{0i} \leq L \quad (19)$$

Il problema rappresentato dall'eq.(19) fornisce i valori cercati di  $\alpha_i$  ed  $x_{0i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) come quei valori che rendono minima la funzione errore  $\Pi$  definita come il quadrato della differenza tra gli spostamenti teorici del modello e le misure provenienti dalle prove sperimentali. Il problema di minimo vincolato definito dall'eq.(19) è tipico di un problema non lineare, come evidenziato nel paragrafo precedente, poiché la funzione  $\Pi$  è non quadratica a causa della dipendenza non lineare della risposta teorica dai parametri  $\alpha_i$  ed  $x_{0i}$ .

In questo studio, piuttosto che approfondire aspetti legati all'algoritmo di soluzione del problema (19), si intende procedere mediante un semplice metodo adottato in [8] nel caso di procedure di identificazione in campo dinamico. Tale procedura consente, per il caso in studio, di potere ricercare il minimo della funzione errore per via numerica rispetto alle variabili  $x_{0i}$  argomento delle funzioni gradino unitario difficilmente trattabili per via analitica. In particolare, la procedura in questione prevede una prima fase di minimizzazione della funzione errore  $\Pi$  rispetto ai soli parametri  $\alpha_i$  per fissate posizioni del danno, ottenendo la seguente funzione errore ridotta  $\tilde{\Pi}(x_{0i}) = \min_{\alpha_i} \Pi(\alpha_i, x_{0i})$ . La soluzione del problema inverso sarà fornita dal minimo della funzione errore ridotta  $\tilde{\Pi}(x_{0i})$  rispetto alle posizioni  $x_{0i}$  cui saranno accoppiati i valori corretti di  $\alpha_i$ .

Nel seguito si presentano casi di singolo o doppio danno su travi uniformi. Inizialmente saranno presentati i risultati con riferimento a misure sperimentali completamente esenti da errore, e dunque ricavate dal modello teorico stesso, allo scopo di studiare il comportamento della procedura di identificazione proposta. Successivamente verranno introdotti errori nelle acquisizioni delle misure allo scopo di studiarne gli effetti sulla soluzione. E' da notare che, a differenza della procedura descritta nel paragrafo precedente, il problema di ottimizzazione non richiede la conoscenza a priori né del numero di danni né della posizione del danno rispetto ai punti di misura come verrà meglio evidenziato negli esempi che seguono.

#### 5. APPLICAZIONI

##### 5.1 Danno singolo in una trave appoggiata

Si consideri una trave in acciaio ( $E = 2.10 \cdot 10^8$  kN/m<sup>2</sup>) e sezione trasversale quadrata ( $h = 18.6$  cm) di lunghezza  $L = 100$  cm in cui sia presente un intaglio all'ascissa  $x_0 = 40$  cm di profondità  $d = 4.74$  cm pari ad una entità di danno  $\beta = 0.2546$  a cui corrisponde, secondo l'eq.(16) (in cui si è assunto per comodità  $A = 1$ ),  $\alpha = 0.943$  cm. Supponendo incogniti l'intensità  $\beta$  e la posizione  $x_0$  del suddetto danno, si procede all'identificazione dei suddetti

parametri supponendo note le misure esatte  $u^E(x_1)$ ,  $u^E(x_2)$  nei due punti di ascissa  $x_1 = 30 \text{ cm}$  e  $x_2 = 70 \text{ cm}$  ottenute dal modello in studio mediante l'eq.(10) per una condizione di carico concentrato  $P$  all'ascissa  $x_p = 60 \text{ cm}$ . La procedura di ottimizzazione descritta nel paragrafo precedente conduce alla funzione errore ridotta  $\tilde{\Pi}(x_0)$  rappresentata in Fig.1a che mostra il minimo assoluto in corrispondenza della reale posizione e della reale entità del danno.

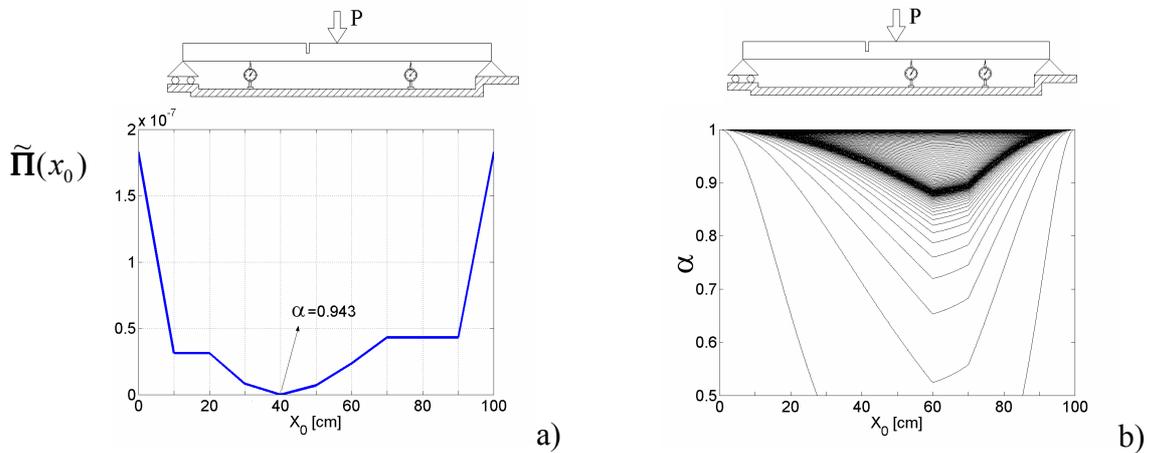


Figura 1. Trave appoggiata con singolo danno per diverse posizioni dei punti di misura:  
 a) Funzione errore ridotta  $\tilde{\Pi}(x_0)$  ; b) Curve di livello della funzione errore  $\Pi(\alpha, x_0)$ .

In Fig.1b è considerato lo stesso caso trattato in precedenza con riferimento però a due punti di misura, entrambi a destra del danno, di ascissa  $x_1 = 70 \text{ cm}$  e  $x_2 = 90 \text{ cm}$ . La Fig.1b, in particolare, riporta le curve di livello della funzione errore  $\Pi(\alpha, x_0)$  per mostrare come essa non presenti un unico minimo assoluto bensì una linea lungo la quale, per diverse coppie di valori  $\alpha, x_0$ , la funzione  $\Pi(\alpha, x_0)$  mantiene costante il valore minimo. La suddetta circostanza suggerisce quindi, pur nel rispetto della condizione necessaria  $nc \times nm \geq 2n$ , una accurata selezione dei punti di misura al fine di evitare di incorrere in un mal-condizionamento del problema inverso.

Al fine di indagare in merito all'influenza della condizione di carico sulla soluzione del problema inverso, si consideri ora la stessa trave danneggiata del caso precedente, ma considerando di acquisire un'unica misura in corrispondenza dell'ascissa  $x_1 = 70 \text{ cm}$ .

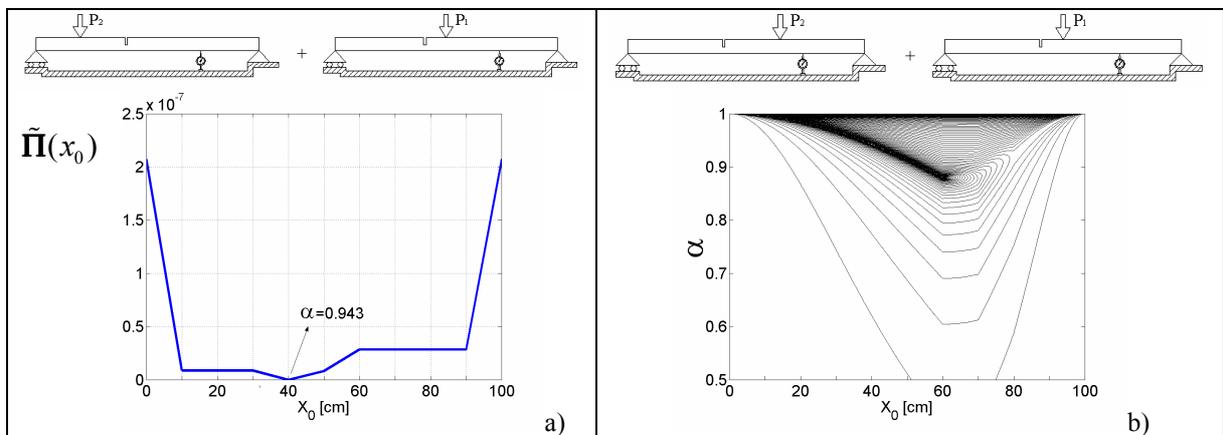


Figura 2. Trave appoggiata con singolo danno ed un unico punto di misura per diverse combinazioni di carico: a) Funzione errore ridotta  $\tilde{\Pi}(x_0)$  ; b) Curve di livello della funzione errore  $\Pi(\alpha, x_0)$ .

In tali condizioni, non essendo rispettata la condizione necessaria  $nc \times nm \geq 2n$ , si aggiunga, ai fini di una completa definizione della funzione errore  $\Pi(\alpha, x_0)$ , una misura in corrispondenza sempre dell'ascissa  $x_1 = 70 \text{ cm}$ , ma per effetto di una condizione di carico concentrato  $P_2$  a sinistra del danno all'ascissa  $x_{p2} = 30 \text{ cm}$ . I risultati di tale esempio sono riportati in Fig.2a in cui la funzione errore ridotta  $\tilde{\Pi}(x_0)$  mostra il suo minimo assoluto in corrispondenza della reale posizione e della reale entità del danno. Nel caso in cui la seconda condizione di carico  $P_2$  concentrato sia scelta invece, come il primo carico, a destra del danno, per esempio all'ascissa  $x_{p2} = 80 \text{ cm}$ , si ottiene la funzione errore  $\Pi(\alpha, x_0)$  le cui curve di livello sono rappresentate in Fig.2b mostrando infinite soluzioni (una valle in cui  $\Pi(\alpha, x_0)$  assume il suo minimo assoluto) per diverse coppie di valori  $\alpha, x_0$ . Se ne deduce ancora una volta che una corretta posizione del problema inverso richiede informazioni sperimentali provenienti da entrambi i tratti in cui il danno presente suddivide la trave.

## 5.2 Due danni in una trave appoggiata

L'espressione esplicita della funzione errore  $\Pi(\alpha_i, x_{0i})$  presentata nell'eq.(19) sulla base dell'eq.(17) consente una agevole soluzione del problema di identificazione anche nel caso di presenza di due danni richiedendo la determinazione dei quattro parametri  $\alpha_i, x_{0i}$  e  $\alpha_2, x_{02}$ . Si consideri allora la stessa trave dell'esempio precedente soggetta ad un carico concentrato  $P$  all'ascissa  $x_p = 60 \text{ cm}$  in cui siano presenti un primo danno ad  $x_{01} = 30 \text{ cm}$  di entità  $\beta_1 = 0.2546$  (corrispondente al parametro  $\alpha_1 = 0.943 \text{ cm}$ ) ed un secondo danno ad  $x_{02} = 80 \text{ cm}$  di entità  $\beta_2 = 0.1419$  (corrispondente al parametro  $\alpha_2 = 0.881 \text{ cm}$ ). L'acquisizione di misure nei punti  $x_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $x_2 = 50 \text{ cm}$ ,  $x_3 = 70 \text{ cm}$  e  $x_4 = 90 \text{ cm}$  conduce alla funzione errore ridotta  $\tilde{\Pi}(x_{01}, x_{02})$  le cui curve di livello sono riportate in Fig.3a e mostrano due minimi assoluti entrambi in corrispondenza della situazione reale del danno.

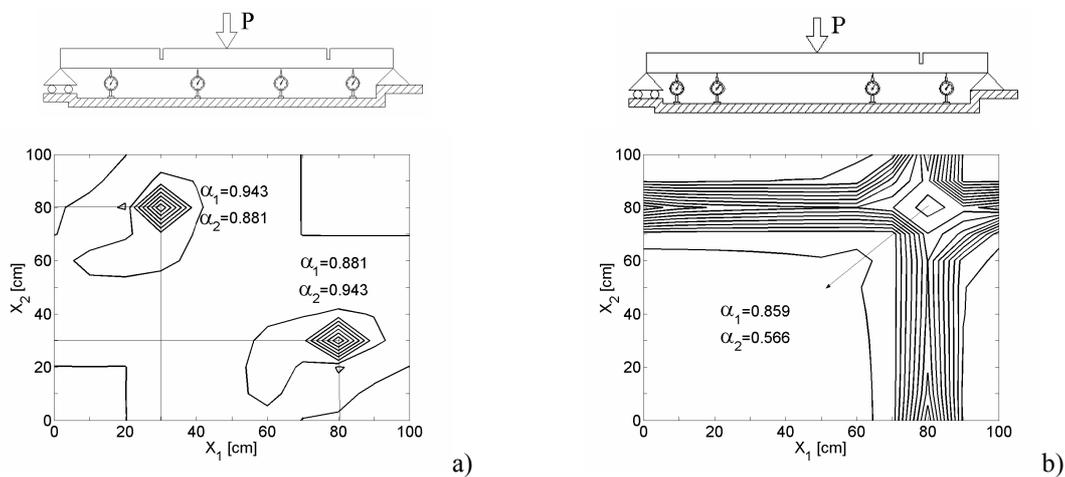


Figura 3. Funzione obiettivo ridotta  $\tilde{\Pi}(x_{01}, x_{02})$ ; a) Trave con due danni; b) Trave con un singolo danno.

Si noti che, cambiando la posizione dei punti di misura rispetto alla posizione del danno si altererebbe la posizione del problema di identificazione. E' utile però fare notare che adottando il modello di trave con due danni nel caso di presenza di un unico danno (ad esempio una trave con danno ad  $x_0 = 80 \text{ cm}$  di intensità  $\beta_2 = 0.1419$  ( $\alpha = 0.881 \text{ cm}$ ) si otterrebbe la funzione errore ridotta  $\tilde{\Pi}(x_{01}, x_{02})$  le cui curve di livello sono riportate in Fig.3b con un unico minimo per  $x_{01} = x_{02} = 80 \text{ cm}$  corrispondente alla reale posizione del danno a cui

si associano i valori dei parametri  $\alpha_1 = 0.859 \text{ cm}$  ed  $\alpha_2 = 0.566 \text{ cm}$ , i quali rispettano la relazione  $(1-\alpha_1A)/\alpha_1 + (1-\alpha_2A)/\alpha_2 = (1-\alpha)A/\alpha$ , cioè sommando le rigidezze, a meno di  $EI_0$ , delle molle equivalenti ai danni identificati si ottiene la rigidezza equivalente al danno reale.

### 5.3 Simulazione di dati sperimentali

Al fine di studiare la sensibilità della procedura di ottimizzazione agli inevitabili errori da cui sono influenzate le misure provenienti da prove sperimentali, sono stati simulati dei dati sperimentali perturbando la risposta proveniente dal modello analitico come segue:  $u^E(x_{k,l}) = u(\alpha_i, x_{0i}, x_{k,l})[1+R_{k,l}]$  in cui  $R_{k,l}$  è una variabile *random* a media nulla ed uniformemente distribuita in un intervallo la cui ampiezza definisce l'intensità dell'errore nelle misure. Dalle realizzazioni della variabile *random*  $R_{k,l}$  si ottengono le realizzazioni dei dati sperimentali simulati  $u^E(x_{k,l})$  per ognuna delle quali si otterrà una realizzazione della soluzione del problema di identificazione  $\alpha_i, x_{0i}$ . Si indicheranno con  $\bar{\alpha}_i, \bar{x}_{0i}$  le medie e con  $\sigma_{\alpha_i}, \sigma_{x_{0i}}$  le deviazioni standard dei parametri oggetto dell'identificazione. La sensibilità all'errore della procedura di ottimizzazione è analizzata mediante i parametri errore medio normalizzato  $\bar{\epsilon}$  e deviazione standard normalizzata  $\sigma_{\epsilon}$  [3] riportate in (20)

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{|\bar{\alpha}_i - \alpha_i|}{\alpha_i} + \frac{|\bar{x}_{0i} - x_{0i}|}{x_{0i}}, \quad \sigma_{\epsilon} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{\alpha_i}}{\alpha_i} + \frac{\sigma_{x_{0i}}}{x_{0i}} \quad (20)$$

E' stata considerata la trave appoggiata con singolo danno studiata nel paragrafo 5.1 e sono state considerate le misure in corrispondenza della ascisse  $x_{01} = 30 \text{ cm}$  e  $x_{02} = 70 \text{ cm}$ . In Figg.4a,b sono riportati, al variare del numero di generazioni, l'errore medio  $\bar{\epsilon}$  e la deviazione standard  $\sigma_{\epsilon}$  normalizzati per una condizione di carico concentrato  $P$  all'ascissa  $x_p = 60 \text{ cm}$  all'aumentare dell'intensità dell'errore 1%, 5% e 10% sulle misure sperimentali. Sia la media normalizzata  $\bar{\epsilon}$  che la deviazione standard normalizzata  $\sigma_{\epsilon}$  tendono a stabilizzarsi attorno ad un valore dipendente dal livello di errore introdotto.

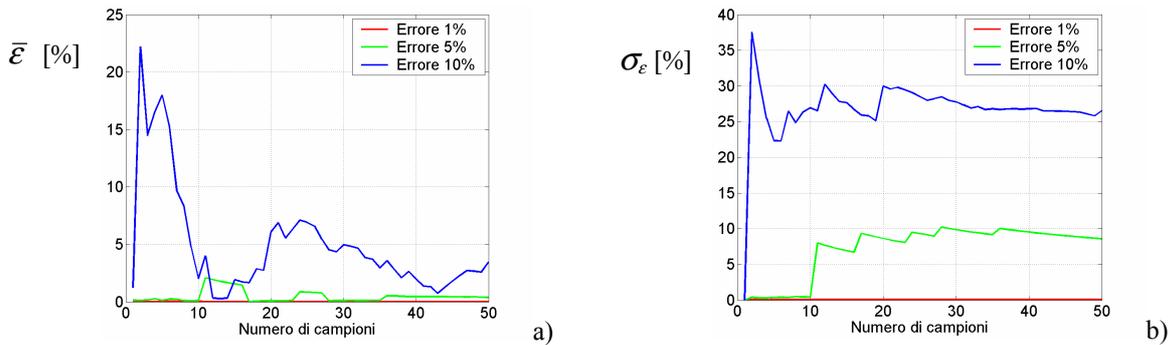


Figura 4. a) Errore medio  $\bar{\epsilon}$ , b) deviazione standard  $\sigma_{\epsilon}$  normalizzati al variare del numero di generazioni.

Un'ultima analisi è riportata in Figg.5a, b in cui, per fissato numero di generazioni pari a 50, si riportano  $\bar{\epsilon}$  e  $\sigma_{\epsilon}$  all'aumentare delle condizioni di carico realizzate. Sono state considerate fino a tre condizioni di carico concentrato a tre diverse ascisse  $x_{p1} = 60 \text{ cm}$ ,  $x_{p2} = 80 \text{ cm}$  e  $x_{p3} = 20 \text{ cm}$  ed ancora per diverse intensità di errore 1%, 5% e 10%. Le Figg.5a,b evidenziano come  $\bar{\epsilon}$  e  $\sigma_{\epsilon}$  tendono a diminuire all'aumentare delle condizioni di carico considerate.

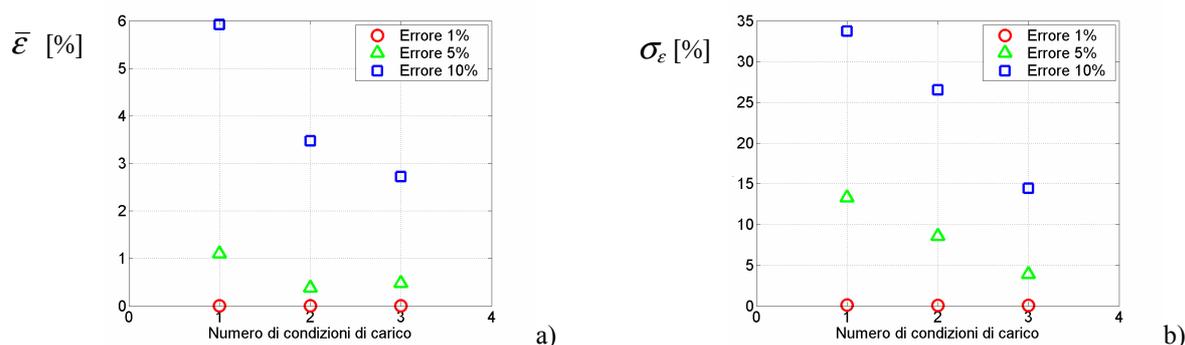


Figura 5. a) Errore medio  $\bar{\epsilon}$ , b) deviazione standard  $\sigma_{\epsilon}$  normalizzati all'aumentare delle condizioni di carico.

## 6. CONCLUSIONI

Nello studio qui riassunto si è trattato il problema dell'identificazione di danni concentrati in travi uniformi mediante il modello di Eulero-Bernoulli sotto l'ipotesi di comportamento lineare, ma senza alcuna restrizione riguardante l'intensità del danno. Si è affrontato, in primo luogo, il problema diretto di analisi in campo statico trattando il danno concentrato come una singolarità della rigidezza flessionale. Sulla base di tale approccio, il problema di identificazione è stato impostato come una procedura di ottimizzazione di una funzione che misura l'errore della risposta del modello rispetto a misure sperimentali. Tale approccio consente un'agevole soluzione del problema che risulta essere ben posto non solo in dipendenza del numero di misure disponibili, ma anche della loro posizione e della condizione di carico da cui provengono. La procedura proposta fornisce risultati incoraggianti anche nei casi in cui non si conosce a priori il numero di danni presenti, e risulta poco sensibile agli errori da cui sono influenzate le misure sperimentali.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Di Paola M., Bilello C.: An integral equation for damage identification of Euler-Bernoulli beams under static loads, accettato per la pubblicazione su *Engineering Structures*, (2003).
- [2] Biondi B., Caddemi S.: Closed form solutions of Euler-Bernoulli beam with singularities, sottomesso a *Int.J.Solids & Structures*, (2003).
- [3] Banan M.R., Banan M.R., Hjelmstad K.D.: Parameter estimation of structures from static response. II:Numerical simulation studies, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 120, pp.3259-3283, (1994).
- [4] Anifantis N., Dimarogonas A.: Stability of columns with a single crack subjected to follower and vertical loads, *Int.J.Solids & Structures*, Vol. 19, pp.281-291, (1983).
- [5] Cerri M.N., Vestroni F.: Detection of damage in beams subjected to diffused cracking, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 234, pp.259-276, (2000).
- [6] Bilello C., Theoretical and experimental investigation on damaged beams under moving systems; Tesi di Dottorato, Università di Palermo, 2001 .
- [7] Bagarello F.: Multiplications of distributions in one dimension and a first application to quantum field theory, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 266, pp.298-320, (2002).
- [8] Vestroni F., Capecchi D.: Damage detection in beam structures based on frequency measurements, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 126, pp.761-768, (2000).